INFLUÊNCIA DAS DECISÕES INDIVIDUAIS NUM MERCADO COMPETITIVO

A. S. MOUSA, R. SOEIRO, AND A. A. PINTO

فِي الوَقت الذِي تعنِي فِيه كَلِمَة أسوَاق الكَثِير لِلحِيَاة اليومِية لِلفلسطِينِيِين، و تُمَارس تَأثِيرًا لَا يمكن انكَارُه علَى قرَارَاتِنَا الفردِية و الجمَاعِية، فمن الطبِيعِي أن يُطرح السُؤَال العكسِي: مَا هو تَأثِير أو تدَاعِيَات قرَارَاتنَا الفردِية فِي سوق تنَافُسِية؟

At a time where the word *markets* is engraved in the everyday american life, and exerts an undeniable influence over our individual and collective decisions, it is natural to pose the reverse question: what is the impact, or repercussion, of our individual decisions in a competitive market?

Numa altura em que a palavra *mercados* marca o quotidiano português, e exerce uma influência inquestionável sobre as nossas decisões individuais e colectivas, é natural invertermos a questão: qual a influência ou repercussão das nossas decisões individuais num mercado competitivo?

Claro está, que perceber decisões individuais pressupõe entender as idiosincrasias associadas a cada indíviduo, as suas preferências, as limitações associadas ao seu acesso a informação, às condições subjacentes ao processo de tomada de decisão, sejam elas económicas, sociais, ou outras. Naturalmente, não temos neste trabalho a presunção de dar uma resposta contundente à questão colocada. Mas, fazendo um exercício puramente matemático, podemos pensar no seguinte: se fossemos todos exactamente iguais, perante o mesmo conjunto de alternativas e tendo a mesma informação, tomaríamos todos a mesma decisão? Pretendemos com o modelo em teoria dos jogos aqui apresentado, captar a influência das nossas decisões, ou escolhas, sobre as decisões dos outros e por sua vez mostrar o efeito provocado num mercado que vende essas alternativas. Mostraremos que a heterogeneidade associada a um conjunto de indíviduos num processo de decisão, não é crucial para uma heterogeneidade de decisões ou estratégias. Antes, uma relação negativa entre esses mesmos indíviduos basta para criar diversidade nas escolhas finais. Se essa escolha for entre vários produtos vendidos em alternativa, então daí resulta que o facto de todos os indíviduos terem as mesmas preferências e estarem nas mesmas condições, não leva necessáriamente a uma situação de monópolio, o que poderia ser expectável. Por outro lado, se a relação entre os indivíduos for positiva, então o efeito desta influência leva a situações em que os indivíduos tomam todos a mesma decisão, embora individualmente possam todos ter preferência por uma outra decisão, levando a uma situação de monopólio.

Para criar um modelo sócio-económico que capte estes fenómenos de interação entre indivíduos num mercado, Defesa, Faias e Pinto em [6] utilizaram os conceitos de *crowding type* e *taste type* introduzidos por Cownley and Wooders (por exemplo em [7]). Reflectem estes conceitos formas de agrupar pessoas, explorando a dicotomia gostos pessoais/características observáveis. Por exemplo, podemos agrupar pessoas de acordo com a sua faixa etária, considerando-se esta uma característica observável, ou segundo a sua preferência, ou gosto, músical, por exemplo, se gostam de jazz, rock, etc... Posteriormente, seguindo a mesma linha de pensamento, Almeida, Cruz, Ferreira e Pinto (em [1]) desenvolveram um modelo que permite relacionar teoria de jogos com o campo da psicologia social por meio das teorias do Comportamento Planeado ou Acção Racional, desenvolvida nos trabalhos de Ajzen, Baker, entre outros (ver por exemplo [3, 4]). Neste modelo, o conceito de equilíbrio de Nash Bayesiano é proposto como um mecanismo, dos muitos possíveis, por trás da transformação de intenções humanas em comportamentos. Mousa, Oliveira, Pinto e Soeiro em [11] apresentaram uma versão simplificada do modelo introduzido em [6] que consiste numa versão envolvendo dois grupos de indíviduos perante uma mesma decisão dicotómica, estudaram a possibilidade dos indivíduos tomarem uma decisão em probabilidade e fizeram uma análise da evolução dinâmica ao longo do tempo, das decisões. Aqui adaptamos alguns resultados obtidos em [11] a uma versão simplificada do modelo de escolha em turismo introduzido em [6], para explorarmos o impacto que as relações num grupo de pares têm sobre a procura por um determinado produto.

1. O modelo

Descreveremos um modelo em teoria de jogos onde um grupo de indivíduos tem de escolher uma de duas alternativas, alternativas essas que podem ser referentes a um produto ou serviço, e portanto ter um preço associado. A preferência dos indivíduos pelas alternativas, a relação entre os jogadores e preço das alternativas, são os factores preponderantes para decisão dos indivíduos neste modelo.

Por ser um exemplo esclarecedor, inspirados em [6], consideraremos que o grupo de indivíduos é um grupo de turistas que tem de escolher entre passar férias numa estância de praia ou de montanha. Sabendo os preços praticados por cada uma dessas duas estâncias, a escolha de cada turista é individual e depende, não só dos preços, mas também de quanto gosta de cada uma das estâncias, e por fim de quanto gosta de estar com outros turistas em cada uma das estâncias.

Consideremos então um conjunto de n turistas, portanto, com $n \in \mathbb{N}$. Definimos o conjunto dos turistas como $\mathbf{T} = \{1, \dots, n\}$. Suponhamos que existem duas estâncias turísticas, uma estância turística na *Praia*, a estância B (do inglês *Beach*) e uma estância turística na *Montanha*, a estância M. Sendo assim, um turista $i \in \mathbf{T}$ tem que escolher um elemento do conjunto $\mathbf{E} = \{B, M\}$.

Os parâmetros que influenciam a escolha de cada turista são os seguintes:

θ_E - o preço praticado pela estância E;
ω_E - quanto um turista gosta ou não da estância E;
α_E - quanto um turista gosta ou não de estar com outro turista na estância E.

Vamos agora, usando estes parâmetros, definir as variáveis que representam as preferências relativas dos turistas, com e sem a influência do preço praticado pelas estâncias. Assim, definimos a *preferência relativa sem preço* $x_F = \omega_B - \omega_M$, cuja interpretação é a seguinte: se $x_F > 0$ os turistas preferem a estância de praia; se $x_F < 0$, os turistas preferem a estância de montanha; se $x_F = 0$, os turistas não têm preferência por nenhuma estância. Definimos ainda a *preferência relativa com* *preço*, onde se acrescenta a diferença de preço à interpretação anterior

$$x = \theta_M - \theta_B + x_F.$$

Crucial neste modelo são os parâmetros α_B e α_M. Estes são os parâmetros responsáveis por captar o efeito que as escolhas de uns têm sobre as escolhas dos outros. Mais importante será a relação entre os dois parâmetros. Definimos

$$A = \alpha_B + \alpha_M$$

e dizemos que os turistas *gostam de estar juntos* se $A > 0$, e que os turistas *não gostam de estar juntos* se $A \leq 0$.

Descrevemos as escolhas dos turistas através dum *mapa estratégico* $S : \mathbf{T} \to [0, 1]$ que associa a cada turista i a sua escolha, em probabilidade. Nomeadamente, um turista escolhe a estância B com probabilidade $S(i) = p_i^B$ e a estância M com probabilidade $1 - S(i) = p_i^M$. O conjunto de todas as estratégias possíveis dos turistas é dado por,

$$\mathbf{S} = \left\{ (p_1^B, p_2^B, \dots, p_n^B) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq p_i^B \leq 1, \quad i \in \mathbf{T} \right\} .$$

A *quota de mercado* da estância turística na praia $S_B = \sum_{i \in \mathbf{T}} S(i)$ é dada pela soma das probabilidades com que os turistas escolhem estância turística na praia e, análogamente, a *quota de mercado* da estância turística na montanha $S_M = n - S_B$ é dada pela soma das probabilidades com que os turistas escolhem a estância turística na montanha. Para analisar qual a repercurssão quando um único turista i decide mudar a sua decisão, introduzimos aquilo a que chamamos i-quotas de mercado. Nesse sentido, *i-quota de mercado* da estância turística na praia $\hat{S}_{B,i} = S_B - S(i)$ é dada pela sua quota de mercado menos o peso da escolha do turista i. Da mesma forma, a *i-quota de mercado* da estância turística na montanha $\hat{S}_{M,i} = S_M - (1 - S(i))$ é dada pela sua quota de mercado menos o peso da escolha do turista i. Assim, se só o individuo i alterar a sua decisão $S(i)$, as i-quotas de mercado $\hat{S}_{B,i}$ e $\hat{S}_{M,i}$ permanecem constante.

Assumimos que um turista tem por objectivo fazer a escolha que lhe trará maior felicidade. Na terminologia de teoria dos jogos, dizemos que os turistas procuram escolher a estância que maximiza a sua função de utilidade. Podemos agora definir para cada turista $i \in \mathbf{T}$, a sua função de utilidade $U_i : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$, dada por,

$$U_i(S) = \sum_{E \in \mathbf{E}} p_i^E (-\theta_E + \omega_E + \alpha_E \hat{S}_{E,i}).$$

Notamos que para cada turista $i \in \mathbf{T}$, a *parcela pessoal*

$$p_i^B(-\theta_B + \omega_B) + p_i^M(-\theta_M + \omega_M)$$

da sua utilidade $U_i(S)$ corresponde à utilidade que o turista teria se os outros turistas não influenciassem a sua felicidade. A *parcela social*

$$p_i^B \alpha_B \hat{S}_{B,i} + p_i^M \alpha_M \hat{S}_{M,i}$$

da sua utilidade $U_i(S)$ indica a influência exacta dos outros na sua felicidade.

Um conceito importante em teoria de jogos é o de *bem-estar social*. Aqui, sendo que os turistas são indistinguíveis, é natural considerar que o *bem-estar da comunidade* dos turistas $W(S)$ consiste na soma das utilidades de todos os turistas

$$W(S) = \sum_{i \in \mathbf{T}} U_i(S).$$

Seja $V : [0,1] \times [0,n] \to \mathbb{R}$ a função auxiliar dada por

$$V(p, \hat{S}) = \alpha_M(n-1-\hat{S}) - \theta_M + \omega_M + p(x - \alpha_M(n-1) + A\hat{S}).$$

Para calcular o valor da utilidade $U_i(S)$ do turista $i \in \mathbf{T}$, notamos que as únicas informações que precisamos saber sobre a estratégia S é a probabilidade p_i^B e a i-quota de mercado $\hat{S}_{E,i}$. Mais ainda, podemos re-escrever o valor da utilidade $U_i(S)$ da seguinte forma

$$U_i(S) = V(p_i^B, \hat{S}_{B,i}).$$

Estamos agora em condições de definir o que é um equilíbrio de Nash deste jogo, que é um dos conceitos fundamentais de teoria dos jogos.

Definição 1. *A estratégia $S^* : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ é um* equilíbrio de Nash *se*

$$U_i(S^*) \geq U_i(S)$$

para cada turista $i \in \mathbf{T}$ e para cada estratégia $S \in \boldsymbol{S}$, com a propriedade $S^*(j) = S(j)$ para cada turista $j \in \boldsymbol{T} \setminus \{i\}$.

Portanto, uma vez feitas as escolhas de todos os turistas, esse conjunto de escolhas é um equilíbrio de Nash se nenhum turista melhorar ao mudar unilateralmente a sua decisão.

Até este momento não mencionamos o ponto de vista das estâncias neste jogo, essa discussão levar-nos-ia a outros conceitos, que fogem ao âmbito deste trabalho (para tal ver [14]). No entanto, notamos que ao caracterizar as estratégias que são equilíbrios de Nash para os turistas, estaremos a caracterizar completamente, para cada estância, as quotas de mercado esperadas pressupondo escolhas racionais por parte dos turistas. Racionais no sentido de cada turista fazer a melhor escolha em termos da sua utilidade, ou felicidade, dadas as escolhas dos outros e os preços praticados pelas estâncias turísticas.

2. Equilíbrios de Nash

Dadas as preferências dos turistas ω_E e α_E, iremos estudar, para cada par de preços (θ_B, θ_M), as estratégias que são equilíbrios de Nash do jogo. Lembramos que um equilíbrio de Nash pressupõe que cada turista só muda a sua estratégia se ao mudar aumentar a sua utilidade. Assim, não se permite que um turista se coligue com outros, de forma que, ao alterarem a sua estratégia conjunta, aumentem a sua utilidade. O estudo do efeito de coligações é feito noutro trabalho (ver por exemplo [8]).

2.1. **Estratégias puras.** Diz-se que uma estratégia é pura se os turistas escolhem uma das estâncias com probabilidade 1, ou seja, $p_i^B = 1$ ou $p_i^M = 1$, e portanto, os turistas optam exclusivamente por uma das estâncias. Relembrando que os turistas são indistinguíveis, a definição seguinte permite identificar, e posteriormente caracterizar, estratégias puras dos turistas.

Definição 2 (l-estratégia)**.** *Seja $l \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Uma* l-estratégia *$S \in \boldsymbol{S}$ é uma estratégia em que:*

(i) l turistas escolhem a estância B com probabilidade $S(i) = p_i^B = 1$;
(ii) $n - l$ turistas escolhem a estância M com probabilidade $1 - S(j) = p_j^M = 1$.

Portanto, numa l-estratégia a quota de mercado para a praia é $S_B = l$ e para a montanha é $S_M = n - l$.

Os equilíbrios de Nash em estratégias puras são a união de todas as l-estratégias que são equilíbrios de Nash. Note-se que se uma l-estratégia S é um equilíbrio de Nash para alguma preferência relativa com preço x, então todas as l-estratégias são equilíbrios de Nash para o mesmo x.

Dada uma n-estratégia S, para qualquer turista i, o valor da sua utilidade é dado por

$$U_i(S) = -\theta_B + \omega_B + \alpha_B(n-1).$$

O bem-estar da comunidade dos turistas é dado por $W(S) = nU_i(S)$.

Dada uma 0-estratégia S, para qualquer turista j, o valor da sua utilidade é dado por

$$U_j(S) = -\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n-1).$$

O bem-estar da comunidade dos turistas é dado por $W(S) = nU_j(S)$.

Consideremos uma l-estratégia S com $l \in \{1, \ldots, n-1\}$. Um turista i com estratégia $S(i) = 1$ tem utilidade

$$U_i(S) = -\theta_B + \omega_B + \alpha_B(l-1).$$

Um turista j com estratégia $S(j) = 0$ tem utilidade

$$U_j(S) = -\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n-l-1).$$

O bem-estar da comunidade dos turistas neste caso é dado por $W(S) = lU_i(S) + (n-l)U_j(S)$.

Seja $A \leq 0$ e considere-se que a l-estratégia é um equilíbrio de Nash. Se $\alpha_B \leq \alpha_M$

$$U_j(S) \leq U_i(S);$$

e se $\alpha_M \leq \alpha_B$

$$U_i(S) \leq U_j(S).$$

Podemos portanto comparar a felicidade dos turistas que tomam decisões diferentes num equilíbrio de Nash. Curiosamente, os turistas que ficam na estância em que gostam menos de estar juntos têm maior utilidade.

Seja $T(l)$ o *limiar de preferência relativa* dado por

$$T(l) = -Al + \alpha_M(n-1)$$

e seja $T'(l)$ o *limiar auxiliar de preferência relativa* dado por

$$T'(l) = T(l-1) \ .$$

Os próximos resultados caracterizam os equilíbrios de Nash, recorrendo aos limiares definidos antes e distinguindo os casos em que turistas gostam ou não de estar juntos, o que, relembrando, depende do parâmetro A ser positivo ou negativo.

No caso em que os turistas gostam de estar juntos, então vão todos escolher a mesma estância turística. Se não houver uma preferência muito forte por uma das estâncias, então a vontade de estar juntos pode mesmo sobrepôr-se às suas próprias preferências, e aí teremos dois equilíbrios possíveis. Um em que os indivíduos tomam todos a mesma decisão, que vai de encontro às suas próprias preferências, e outro onde tomam todos a mesma decisão, apesar de individualmente terem todos preferência pela outra estância.

Lema 1 (Equilíbrios de Nash em estratégias puras para turistas que gostam de estar juntos.)**.** *Seja $A > 0$. Uma l-estratégia é um equilíbrio de Nash se, e só se, $l = 0$ ou $l = n$. Têm-se ainda que,*

(i) se uma 0-estratégia é um equilíbrio de Nash, então $x \in (-\infty, T(0)]$;
(ii) se uma n-estratégia é um equilíbrio de Nash, então $x \in [T'(n), +\infty)$.

No caso de $A > 0$ temos que $T'(n) < T(0)$, e portanto, se $x \in [T'(n), T(0)]$ um equilíbrio de Nash em estratégias puras pode ser uma 0-estratégia ou uma n-estratégia. Portanto, quando $x < T'(n)$ os turistas preferem sempre estar juntos na estância de montanha, levando assim a estância da praia à falência. Se $x > T(0)$ os turistas preferem sempre estar juntos na estância de praia, levando assim a estância da montanha à falência. Se $x \in [T'(n), T(0)]$ então os turistas têm preferência por estar juntos, independentemente da estância. Existem portanto dois equilíbrios, os monopólios de cada uma das estâncias. Note-se que os turistas podem inclusivé todos escolher uma estância, embora possam todos preferir a outra.

Demonstração. Consideremos uma l-estratégia S com $l \in \{1, \ldots, n-1\}$. Assim, há pelo menos um turista i tal que a sua estratégia é escolher a estância turística na praia, $S(i) = 1$. Para esse turista i, a i-quota de mercado $\hat{S}_{B,i}$ é igual a $l - 1$ e, portanto, o valor da utilidade $U_i(S) = V(1, l-1)$ é dado por

$$\alpha_M(n-l) - \theta_M + \omega_M + 1(x - \alpha_M(n-1) + A(l-1)).$$

No entanto, há pelo menos um turista j tal que a sua estratégia é escolher a estância turística na montanha, $S(j) = 0$. Para esse turista j, a j-quota de mercado na praia $\hat{S}_{B,j}$ é igual a l e, portanto, o valor da utilidade $U_j(S) = V(0, l)$ é dado por

$$\alpha_M(n-1-l) - \theta_M + \omega_M + 0(x - \alpha_M(n-1) + Al).$$

Assim S é um equilíbrio de Nash desde que

$$x - \alpha_M(n-1) + Al \leq 0 \leq x - \alpha_M(n-1) + A(l-1).$$

O que não acontece porque $A > 0$.

Consideremos agora uma n-estratégia S. Para qualquer turista i, o valor da utilidade $U_i(S) = V(1, n-1)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + 1(x - \alpha_M(n-1) + A(n-1)).$$

Assim, o turista i não altera a sua decisão desde que

$$x - \alpha_M(n-1) + A(n-1) \geq 0.$$

Consideremos agora uma 0-estratégia S. Para qualquer turista j, o valor da utilidade $U_j(S) = V(0, 0)$ é dado por

$$\alpha_M(n-1) - \theta_M + \omega_M + 0(x - \alpha_M(n-1)).$$

Assim, o turista j não altera a sua decisão desde que

$$x - \alpha_M(n-1) \leq 0.$$

□

No caso em que os turistas não gostam de estar juntos, então só vão todos escolher a mesma estância turística, quando a preferência por essa estância for muito alta. Caso contrário vão preferir dividir-se entre as duas estâncias.

Lema 2 (Equilíbrios de Nash puros para turistas que não gostam de estar juntos.)**.** *Seja* $A \leq 0$*.*

(i) Uma 0*-estratégia é um equilíbrio de Nash se, e só se,* $x \in (-\infty, T(0)]$*.*
(ii) Uma n*-estratégia é um equilíbrio de Nash se, e só se,* $x \in [T'(n), +\infty)$*.*
(iii) Uma l*-estratégia é um equilíbrio de Nash se, e só se,* $x \in [T'(l), T(l)]$*.*

Tendo-se $A \leq 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{l=0}^{n-1} \{T(l)\}$ há uma única estratégia pura por parte dos turistas que é equilíbrio de Nash; se $x = T(l)$ então um equilíbrio de Nash puro pode ser tanto uma l-estratégia como uma $(l+1)$-estratégia. Aqui a interpretação pode ser a seguinte: supondo que os turistas todos preferem a estância de praia, pode acontecer que o tamanho dessa estância não seja suficiente, e assim os turistas prefiram não estar numa estância demasiado cheia, e portanto escolham a estância de montanha por ter menos gente. Este efeito é captado tendo o parâmetro A negativo.

Demonstração. Consideremos uma n-estratégia S. Para qualquer turista i, o valor da utilidade $U_i(S) = V(1, n-1)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + 1(x - \alpha_M(n-1) + A(n-1)).$$

Assim, o turista i não altera a sua decisão desde que

$$x - \alpha_M(n-1) + A(n-1) \geq 0.$$

Consideremos agora uma 0-estratégia S. Para qualquer turista i, o valor da utilidade $U_i(S) = V(0,0)$ é dado por

$$\alpha_M(n-1) - \theta_M + \omega_M + 0(x - \alpha_M(n-1)).$$

Assim, o turista i não altera a sua decisão desde que

$$x - \alpha_M(n-1) \leq 0.$$

Por fim, consideremos uma l-estratégia S com $l \in \{1, \ldots, n-1\}$. Há pelo menos um turista i tal que a sua estratégia $S(i) = 1$ é escolher a estância turística na praia. Para o turista i, a i-quota de mercado $\hat{S}_{B,i}$ é igual a $l-1$ e, portanto, o valor da utilidade $U_i(S) = V(1, l-1)$ é dado por

$$\alpha_M(n-l) - \theta_M + \omega_M + 1(x - \alpha_M(n-1) + A(l-1)).$$

No entanto, há pelo menos um turista j tal que a sua estratégia $S(j) = 0$ é escolher a estância turística na montanha. Para o turista j, a j-quota de mercado da praia $\hat{S}_{B,j}$ é igual a l e, portanto, o valor da utilidade $U_j(S) = V(0, l)$ é dado por

$$\alpha_M(n-1-l) - \theta_M + \omega_M + 0(x - \alpha_M(n-1) + Al).$$

Assim S é um equilíbrio de Nash desde que

$$x - \alpha_M(n-1) + Al \leq 0 \leq x - \alpha_M(n-1) + A(l-1).$$

□

2.2. **Estratégias mistas.** Nesta altura, perguntamos se há outros equilíbrios de Nash para além dos equilíbrios de Nash em estratégias puras, i.e. equilíbrios em que pelo menos um dos turistas mude de opinião sobre qual das estâncias vai escolher. Nomeadamente, *equilíbrios de Nash mistos estritos* em que pelo menos um turista escolhe a estância B com probabilidade $0 < S(i) = p_i^B < 1$ e a estância M com probabilidade $0 < 1 - S(i) = p_i^M < 1$.

Lema 3. *Num equilíbrio de Nash, dada a estratégia $S(i) = p_i^B$ do turista i, tem-se que*

$$0 < p_i^B < 1 \Rightarrow x = \alpha_M(n-1) - A\hat{S}_{i,B}.$$

Como x é o mesmo para todos os turistas, pelo Lema 3, para os turistas a jogar em probabilidade não inteira, $\hat{S}_{i,B}$ não pode depender do turista i, ou seja todos esses turistas terão que jogar com a mesma probabilidade. Assim, num equilíbrio de Nash em estratégias mistas S, todos os turistas a optar por uma probabilidade não inteira terão que jogar com a mesma probabilidade p_S, e portanto $S_B = l + kp_S$.

Demonstração. O valor da utilidade $U_i(S) = V(p_i^B, \hat{S}_{i,B})$ é dado por

$$\alpha_M(n-1-\hat{S}_{i,B}) - \theta_M + \omega_M + p_i^B(x - \alpha_M(n-1) + A\hat{S}_{i,B}).$$

Dada a estratégia $0 < p_i^B < 1$ do turista i, ela é parte dum equilíbrio de Nash se, e só se, para qualquer outra possível estratégia do turista i, a sua utilidade não aumentar o que implica

$$x - \alpha_M(n-1) + A\hat{S}_{i,B} = 0.$$

□

Tendo em conta os resultados anteriores, a definição seguinte surge de modo natural na procura de equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Definição 3. *Uma* (l,k)-estratégia $S \in \mathbf{S}$ *é uma estratégia em que:*

(1) l turistas optam pela estância B com probabilidade $S(i) = 1$;
(2) $n - (l+k)$ turistas optam pela estância M com probabilidade $1 - S(j) = 1$;
(3) $k \geq 1$ turistas optam pela estância B com probabilidade $0 \leq S(m) = p_S \leq 1$.

Chamamos a p_S a (l,k)-probabilidade *da estratégia S.*

Pelo Lema 3, se uma estratégia $S \in \mathbf{S}$ é um equílibrio de Nash então S é uma estratégia (l,k). Assim, num equilíbrio de Nash, se houver turistas a escolher a estratégia com probabilidade não inteira (entre 0 e 1), então, todos os turistas que escolham a estratégia com probabilidade não inteira têm que escolher uma estratégia com igual probabilidade. Desta forma, limitamos o conjunto de estratégias S que podem ser equílibrios de Nash a um conjunto bem específico de estratégias.

Numa (l,k)-estratégia, as quotas de mercado estão totalmente determinadas, nomeadamente temos $S_B = l + kp_S$ e $S_M = n - S_B$. Uma (l,k)*-estratégia estrita* $S \in \mathbf{S}$ é uma (l,k)-estratégia com (l,k)-probabilidade $0 < p_S < 1$. Portanto, l e $(l+k)$-estratégias estão contidas nas (l,k)-estratégias, mas não nas (l,k)-estratégias estritas. Notamos que se uma (l,k)-estratégia S é um equilíbrio de Nash para alguma preferência relativa com preço x, então todas as (l,k)-estratégias são equilíbrio de Nash para o mesmo x.

Consideremos uma (l,k)-estratégia estrita S que é um equilibrio de Nash. Um turista i que opte pela estratégia $S(i) = 1$ tem valor da utilidade

$$U_i(S) = -\theta_B + \omega_B + \alpha_B(l - 1 + kp_S).$$

Um turista j que opte pela estratégia $S(j) = 0$ tem valor da utilidade

$$U_j(S) = -\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n - 1 - (l + kp_S)).$$

Um turista m que opte pela estratégia $S(m) = p_S$ com $0 < p_S < 1$ tem valor da utilidade

$$U_m(S) = -\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n - 1 - (l + (k-1)p_S)).$$

O bem-estar da comunidade dos turistas é dado por

$$W(S) = lU_i(S) + (n - l - k)U_j(S) + kU_m(S).$$

Seja $A \leq 0$ e considere-se que a (l,k)-estratégia é um equilíbrio de Nash.

(i) Se $\alpha_B \geq 0$, então $U_i(S) \leq U_m(S) \leq U_j(S)$.

(ii) Se $\alpha_M \geq 0$, então $U_j(S) \leq U_m(S) \leq U_i(S)$.

(iii) Se $\alpha_B < 0$ e $\alpha_M < 0$, então quando $(1 - p_S^{-1})\alpha_B \leq \alpha_M$

$$U_m(S) \leq U_j(S) \leq U_i(S);$$

e quando $\alpha_M \leq (1 - p_S^{-1})\alpha_B$

$$U_m(S) \leq U_i(S) \leq U_j(S).$$

Podemos portanto comparar a felicidade dos turistas que tomam decisões diferentes num equilíbrio de Nash. Nomeadamente mostra-se que os turistas que optam por jogar em probabilidade não são os mais felizes. Se os turistas não gostam de estar juntos em nenhuma estância, então aqueles que jogam em probabilidade são os que têm menor utilidade. Se os turistas gostam de estar juntos numa das estâncias, mas não na outra, então, curiosamente, aqueles que ficam na estância em que gostam de estar juntos têm menor utilidade.

Teorema 1 (Equilíbrios de Nash em estratégias mistas para turistas que gostam de estar juntos.)**.** *Seja* $A > 0$.

(i) Uma estratégia mista estrita é um equilíbrio de Nash se, e só se, a estratégia é do tipo $(l,k) = (0,n)$ *e* $x \in (T'(n), T(0))$.

(ii) Têm-se ainda que, o triplo $(0,n;x)$ *determina únicamente*

$$S_B(0,n;x) = l + \frac{k(x - T(0))}{-A(n-1)} \text{ e } p_S(0,n;x) = \frac{x - T(0)}{-A(n-1)}.$$

Assim, num equilíbrio de Nash em que os turistas gostam de estar uns com os outros, todos os turistas têm que escolher a mesma estratégia, mesmo quando a estratégia tem probabilidade não inteira. Mais ainda, para cada estratégia $(0,n)$, a preferência relativa com preço x determina unicamente a probabilidade $p_S(0,n;x)$ com que os turistas escolhem a estância turística na praia e também a quota de mercado $S_B(0,n;x)$ da estância turística na praia. Logo, a preferência relativa com preço x determina únicamente a probabilidade $1 - p_S(0,n;x)$ com que os turistas escolhem as estância turística na montanha e também a quota de mercado $n - S_B(0,n;x)$ da estância turística na montanha.

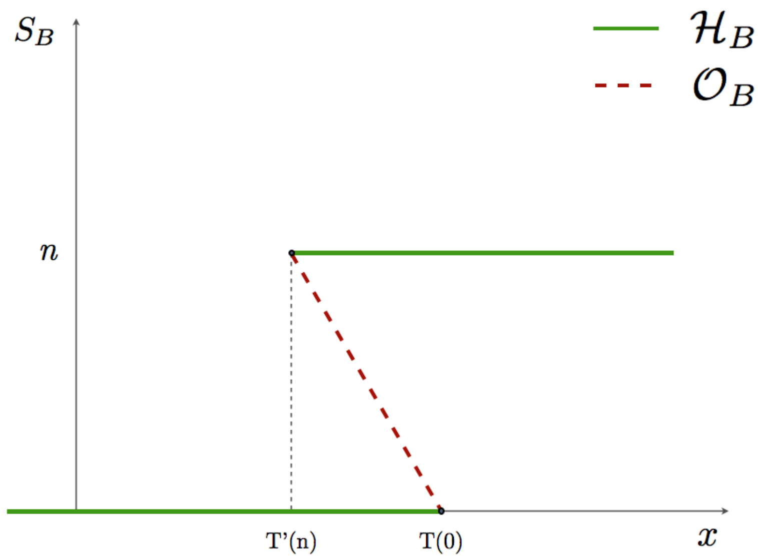

FIGURA 1. O fibrado das quotas de mercado da praia para o caso em que $A > 0$.

Agora, podemos caracterizar geométricamente aquelas que serão as quotas de mercado esperadas pelas estâncias turísticas no caso em que os turistas gostam de estar juntos. As *fibras horizontais* $\mathcal{H}_0^B$ e $\mathcal{H}_n^B$ e a *fibra oblíqua* $\mathcal{O}_{0,n}^B$ são dadas por

$$\mathcal{H}_0^B = \{(x,0) : x \leq T(0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_n^B = \{(x,n) : x \geq T'(n)\}.$$

A *fibra oblíqua* $\mathcal{O}_{0,n,A}^B$, para $A > 0$, é dada por

$$\mathcal{O}_{0,n,A}^B = \{(x, S_B(0,n;x)) : T'(n) \leq x \leq T(0)\}.$$

Se $A > 0$, o *fibrado das quotas de mercado para a praia* $\mathcal{F}_A^B$ é dado por

$$\mathcal{F}_A^B = \mathcal{H}_0^B \cup \mathcal{H}_n^B \cup \mathcal{O}_{0,n,A}^B.$$

O *fibrado das quotas de mercado da montanha* $\mathcal{F}_A^M$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com a propriedade que $(x, n-y) \in \mathcal{F}_A^B$.

Seja $\mathbf{N}(T;x)$ o conjunto de todas as estratégias dos turistas que são equilíbrio de Nash para alguma preferência relativa com preço x.

Corolário 1 (Geometria dos equilíbrios de Nash)**.** *Seja $A > 0$. Há uma correspondência bem definida entre estratégias Nash e o fibrado das quotas de mercado para a praia*

$$S \in \boldsymbol{N}(T;x) \Leftrightarrow (x, S_B) \in \mathcal{F}_A^B$$

com as seguintes propriedades:

(i) Uma l-estratégia S é um equilíbrio $(x, S_B) \in \mathcal{H}_l^B$, para $l \in \{0, n\}$.

(ii) *Uma $(0, n)$-estratégia S é um equilíbrio de Nash se, e só se, $(x, S_B) \in \mathcal{O}^B_{0,n,A}$.*

Assim, temos uma interpretação geométrica das quotas de mercado em função da preferência relativa com preço x que é útil para as estâncias turísticas decidirem quais os preços que devem praticar. Na figura 1 é ilustrado o fibrado das quotas de mercado para o caso $A > 0$.

Demonstração do Teorema 1. Consideremos uma (l, k)-estratégia S em que o turista i opta pela estratégia $S(i) = p_S$ com $0 < p_S < 1$. Assim $\hat{S}_{i,B} = l + (k-1)p_S$, donde o valor da utilidade $U_i(S) = V(p_S, l + (k-1)p_S)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n - 1 - (l + (k-1)p_S)) + p_S(x - \alpha_M(n-1) + A(l + (k-1)p_S)).$$

Pelo Lema 3, temos que

$$x - \alpha_M(n-1) + A(l + (k-1)p_S) = 0.$$

Assim, a $(0, n)$-estratégia S é um equilíbrio de Nash quando

$$x - \alpha_M(n-1) + A(n-1)p_S = 0.$$

Por outro lado, suponhamos que há um turista i tal que a sua estratégia $S(i) = 1$ é escolher a estância turística na praia. Para o turista i, a i-quota de mercado na praia é $\hat{S}_{B,i} = (l-1) + kp_S$ e, portanto, o valor da utilidade $U_i(S) = V(1, (l-1) + kp_S)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n - 1 - ((l-1) + kp_S)) + 1(x - \alpha_M(n-1) + A((l-1) + kp_S)).$$

Donde,

$$x - \alpha_M(n-1) + A((l-1) + kp_S) \geq 0 = x - \alpha_M(n-1) + A(l + (k-1)p_S).$$

O que é impossível para $A > 0$.

Suponhamos agora que há um turista j tal que a sua estratégia $S(j) = 0$ é escolher a estância turística na montanha. Para o turista j, a j-quota de mercado na praia é $\hat{S}_{B,j} = l + kp_S$ e, portanto, o valor da utilidade $U_j(S) = V(0, l + kp_S)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n - 1 - (l + kp_S)) + 0(x - \alpha_M(n-1) + A(l + kp_S)).$$

Donde,

$$x - \alpha_M(n-1) + A(l + kp_S) \leq 0 = x - \alpha_M(n-1) + A(l + (k-1)p_S).$$

O que também é impossível quando $A > 0$. □

Teorema 2 (Equilíbrios de Nash em estratégias mistas para turistas que não gostam de estar juntos.)**.** *Seja $A < 0$.*

(i) *Os equilíbrios de Nash mistos são a união de todas as (l, k)-estratégias que são equilíbrios de Nash.*

(ii) *Uma (l, k)-estratégia é um equilíbrio de Nash misto se, e só se, $x \in [T(l), T'(l + k)]$.*

(iii) *Têm-se ainda que, o triplo $(l, k; x)$ determina únicamente*

$$S_B(l, k; x) = l + \frac{k(x - T(l))}{-A(k-1)} \text{ e } p_S(l, k; x) = \frac{x - T(l)}{-A(k-1)}.$$

Assim, quando os turistas não gostam de estar uns com os outros, todas as estratégias do tipo (l,k) são equilíbrios de Nash para alguns valores da preferência relativa com preço x. Mais ainda, para cada estratégia (l,k), a preferência relativa com preço x determina únicamente a probabilidade $p_S(l,k;x)$ com que os turistas escolhem a estância turística da praia e a quota de mercado $S_B(l,k;x)$ da estância turística na praia. Logo, a preferência relativa com preço x determina também únicamente a probabilidade $1-p_S(l,k;x)$ com que os turistas escolhem as estância turística na montanha e a quota de mercado $n-S_B(l,k;x)$ da estância turística na montanha.

Podemos agora caracterizar geométricamente aquelas que serão as quotas de mercado esperadas pelas estâncias turísticas, no caso em que os turistas não gostam de estar juntos. As *fibras horizontais* $\mathcal{H}_l^B$, para $l \in \{1,\dots,n-1\}$ são

$$\mathcal{H}_l^B = \{(x,l) : T'(l) \leq x \leq T(l)\}.$$

A *fibra global horizontal* é $\mathcal{H}_A^B = \bigcup_{l=0}^n \mathcal{H}_l^B$. As *fibras verticais* $\mathcal{V}_l^B$ são

$$\mathcal{V}_l^B = \{(T(l),y) : l \leq y \leq l+1\}.$$

A *fibra global vertical* é $\mathcal{V}_A^B = \bigcup_l^n \mathcal{V}_l^B$. As *fibras oblíquas* $\mathcal{O}_{l,k,A}^B$, para $A<0$, são

$$\mathcal{O}_{l,k,A}^B = \{(x, S_B(l,k;x)) : T(l) \leq x \leq T'(l+k)\}.$$

A *fibra global oblíqua* é $\mathcal{O}_A^B = \bigcup_{l,k\leq n} \mathcal{O}_{l,k,A}^B$. Se $A<0$, o *fibrado das quotas de mercado da praia* $\mathcal{F}_A^B$ é

$$\mathcal{F}_A^B = \mathcal{H}_A^B \cup \mathcal{V}_A^B \cup \mathcal{O}_A^B.$$

O *fibrado das quotas de mercado da montanha* $\mathcal{F}_A^M$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com a propriedade que $(x,n-y) \in \mathcal{F}_A^B$.

Corolário 2 (Geometria dos equilíbrios de Nash)**.** *Seja $A<0$. Há uma correspondência bem definida entre estratégias Nash e o fibrado das quotas de mercado para a praia*

$$S \in \boldsymbol{N}(T;x) \Leftrightarrow (x,S_B) \in \mathcal{F}_A^B$$

com as seguintes propriedades:

(i) Uma l-estratégia S é um equilíbrio $(x,S_B) \in \mathcal{H}_l^B$.
(ii) Uma $(l,1)$-estratégia S é um equilíbrio de Nash se, e só se, $(x,S_B) \in \mathcal{V}_l^B$.
(iii) Uma (l,k)-estratégia S é um equilíbrio de Nash se, e só se, $(x,S_B) \in \mathcal{O}_{l,k,A}^B$ com $k \geq 2$.

Assim, temos uma interpretação geométrica das quotas de mercado em função da preferência relativa com preço x, que é útil para as estâncias turísticas decidirem quais os preços que devem praticar. Na figura 2 é ilustrado o fibrado das quotas de mercado para o caso $A<0$, com $n=6$ turistas.

O segmento de recta oblíquo $O_{l,k}^B$ começa no canto $(T(l), y_{l,k}(T(l)))$ formado pela extremidade do lado direito do segmento de recta horizontal H_l^B e pela extremidade de baixo do segmento de recta vertical V_l^B. O segmento de recta oblíquo $O_{l,k}^B$ acaba no canto $(T'(l+k), y_{l,k}(T'(l+k)))$ formado pela extremidade esquerda do segmento de recta horizontal H_{l+k}^B e pela extremidade do topo do segmento de recta vertical V_{l+k}^B. Cada segmento de recta oblíquo $O_{l,k}^B$ intersecta o interior dos segmentos de recta horizontais H_{l+j}^B e o interior dos segmentos de recta verticais V_{l+j}^B onde

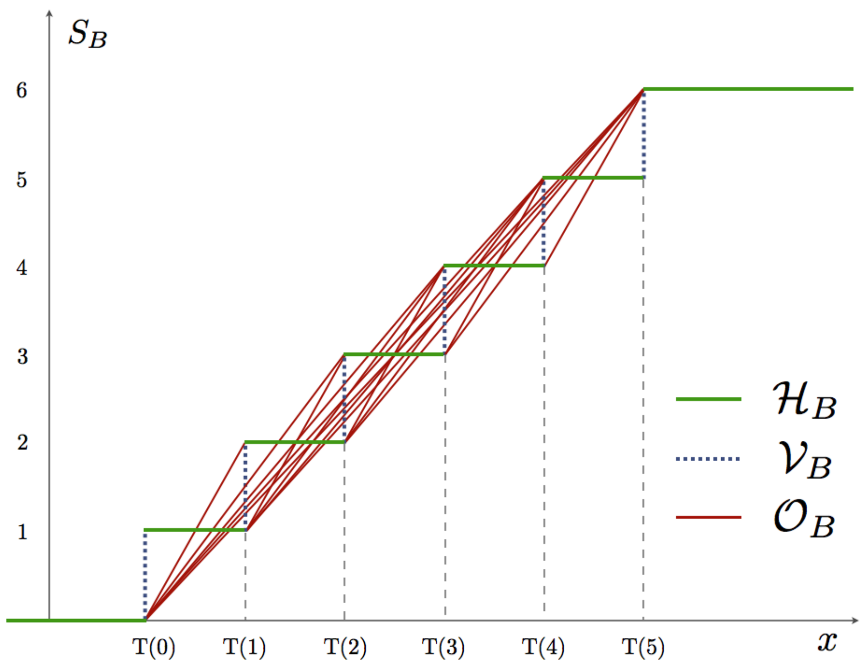

FIGURA 2. O fibrado das quotas de mercado da praia para o caso em que $A < 0$ e existem $n = 6$ turistas.

$1 \leq j \leq k-1$. Se $l < l'$ e $l+k < l'+k'$ então os segmentos de recta oblíquo $O^B_{l,k}$ e $O^B_{l',k'}$ não se intersectam e $O^B_{l,k}$ está do lado esquerdo de $O^B_{l',k'}$.

Se $l' \leq l$ e $k' \leq k$ então os segmentos de recta oblíquos $O^B_{l,k}$ e $O^B_{l',k'}$ intersectam-se no ponto

$$(x(l,k;l',k'), y(l,k;l',k')) \in [T(l), T'(l'+k')] \times [l, l'+k']$$

dado por

$$x(l,k;l',k') = \frac{-A(k-1)(l-l')}{(k'-k)} + T(l) \quad \text{e} \quad \mathrm{y(l,k;l',k') = l + \frac{k(l-l')}{(k'-k)}}.$$

Antes do ponto de intersecção, $O^B_{l,k}$ está do lado direito de $O^B_{l',k'}$, e depois do ponto de intersecção, $O^B_{l,k}$ está do lado esquerdo de $O^B_{l',k'}$.

Demonstração do Teorema 2. Consideremos uma (l,k)-estratégia S em que o turista i opta pela estratégia $S(i) = p_S$ com $0 < p_S < 1$. Assim $\hat{S}_{i,B} = l + (k-1)p_S$, donde o valor da utilidade $U_i(S) = V(p^B_i, l + (k-1)p_S)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n-1-(l+(k-1)p_S)) + p_S(x - \alpha_M(n-1) + A(l+(k-1)p_S)).$$

Pelo Lema 3, temos que S é parte de um Nash se

$$x - \alpha_M(n-1) + A(l+(k-1)p_S) = 0.$$

Suponhamos que há um turista i tal que a sua estratégia $S(i) = 1$ é escolher a estância turística na praia. Para o turista i, a i-quota de mercado na praia é $\hat{S}_{B,i} = (l-1) + kp_S$, e portanto, o valor da utilidade $U_i(S) = V(1, (l-1) + kp_S)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n - 1 - ((l-1) + kp_S)) + 1(x - \alpha_M(n-1) + A((l-1) + kp_S)).$$

Donde,

$$x - \alpha_M(n-1) + A((l-1) + kp_S) \geq 0 = x - \alpha_M(n-1) + A(l + (k-1)p_S).$$

O que acontece.

Suponhamos que há um turista j tal que a sua estratégia $S(j) = 0$ é escolher a estância turística na montanha. Para o turista j, a j-quota de mercado na praia é $\hat{S}_{B,j} = l + kp_S$, e portanto, o valor da utilidade $U_j(S) = V(0, l + kp_S)$ é dado por

$$-\theta_M + \omega_M + \alpha_M(n - 1 - (l + kp_S)) + 0(x - \alpha_M(n-1) + A(l + kp_S)).$$

Donde,

$$x - \alpha_M(n-1) + A(l + kp_S) \leq 0 = x - \alpha_M(n-1) + A(l + (k-1)p_S).$$

O que acontece.

Assim, a (l, k)-estratégia estrita S é um equilíbrio de Nash quando

$$x - \alpha_M(n-1) + A(l + (k-1)p_S) = 0.$$

$\square$

3. Conclusões

Modelamos a influência das decisões individuais num mercado competitivo, usando o exemplo ilustrativo da alocação de turistas num mercado com duas estâncias turísticas alternativas. Dados os preços praticados num mercado e as preferências dos indivíduos, encontramos todas as combinações de escolhas dos indivíduos formando estratégias que são equilíbrios de Nash. Mostramos ainda que estes equilíbrios nem sempre são únicos e que equilíbrios em estratégias puras existem sempre. Por outro lado, estudamos a dependência das quotas de mercado com respeito ao parâmetro de influência que representa a maneira como os indivíduos se relacionam, i. e. se gostam, ou não, de estar na presença uns dos outros. Provamos ainda que mesmo com homogeneidade ex-ante dos indivíduos é possível obter heterogeneidade ex-post nas escolhas e formar um mercado não-monopolista. No entanto, em estratégias puras, uma situação em que não exista monópolio depende dos indivíduos não gostarem de estar na presença uns dos outros, o que se pode dever a vários factores. Assim, perante um ataque agressivo de um produto com um preço baixo, se houver um outro produto que tenha qualidade acrescida e que seja considerado pelos indivíduos um bem comum, portanto trazendo-lhes felificidade acrescida quando partilham a sua escolha, este produto acabará por ser o escolhido pelos indivíduos.

4. Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro ao LIAAD–INESC TEC através do programa PEst, do projecto USP-UP, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Fundação Calouste Gulbenkian, Fundação para a Ciência e Tecnologia FCT, programas FEDER and COMPETE, PTDC/MAT/121107/2010.

Referências

[1] Almeida L., Cruz J., Ferreira H. and Pinto A. A., Bayesian-Nash Equilibria in Theory of Planned Behavior. *Journal of Difference Equations and Applications*, **17** 1085–1093 (2011).

[2] Almeida L., Cruz J., Ferreira H. and Pinto A. A., Leadership Model. *Dynamics, Games and Science I* (eds. M. Peixoto, A. Pinto and D. Rand), Proceedings in Mathematics series, Springer-Verlag, Chapter 5, 53–59 (2011).

[3] Ajzen I., Perceived Behavioral Control, Self-Efficacy, Locus of Control, and the Theory of Planned Behavior. *Journal of Applied Social Psychology*, **32** 665 – 683 (2002).

[4] Baker S., Beadnell B., Gillmore M., Morrison D., Huang B. and Stielstra S., The Theory of Reasoned Action and the Role of External Factors on Heterosexual Mens Monogamy and Condom Use. *Journal of Applied Social Psychology*, **38** 97–134 (2008).

[5] Brida J., Defesa M., Faias M. and Pinto A. A., A Tourist's Choice Model. *Dynamics, Games and Science I* (Eds: M. Peixoto, A. Pinto, D. Rand) Proccedings in Mathematics Series, Springer-Verlag, Chapter 10, 159–167 (2011).

[6] Brida J., Defesa M., Faias M. and Pinto A. A., Strategic Choice in Tourism with Differentiated Crowding Types. *Economics Bulletin*, **30** 1509–1515 (2010).

[7] Conley John P. and Wooders Myrna H., Tiebout Economies with Differential Genetic Types and Endogenously Chosen Crowding Characteristics. *Journal of Economic Theory*, **98** 261–294 (2001).

[8] Pinto A. A., *Game Theory and Duopoly Models*. Interdisciplinary Applied Mathematics Series, Springer, New York (2013).

[9] Pinto A. A., Faias M. and Mousa A. S., Resort Pricing and Bankruptcy. *Dynamics, Games and Science II*. (Eds: M. Peixoto, A. Pinto, D. Rand). Proceedings in Mathematics Series, Springer-Verlag, **2** Chapter 40, 567–573 (2011).

[10] Pinto A. A., Mousa A. S., Mousa M. S. and Samarah R. M., Tilings and Bussola for Making Decisions. *Dynamics, Games and Science I*. (Eds: M. Peixoto, A. Pinto, D. Rand). Proceedings in Mathematics Series, Springer-Verlag, **1** Chapter 44, 689–708 (2011).

[11] Mousa. A., Oliveira T., Soeiro. R. and Pinto A. A. Dynamics of human decisions. *Journal of Dynamics and Games*, 1–25 (2013). Aceite para publicação.

[12] Mousa. A., Oliveira T., Soeiro. R. and Pinto A. A. Influence of Individual Decisions in Competitive Market Policies. *Modeling, Optimization and Bioeconomy*. (Eds: A. Pinto, D. Zilberman). Proceedings in Mathematics Series, Springer-Verlag. Aceite para publicação.

[13] Pinto A. A., Rand D. A. and Ferreira F., *Fine Structures of Hyperbolic Diffeomorphisms*. Springer-Verlag Monograph (2010).

[14] Soeiro R., *Influência das decisões individuais num mercado competitivo*. MSc thesis, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto (2012).

Department of Mathematics, Faculty of Science, Birzeit University, Palestine
E-mail address: asaid@birzeit.edu

LIAAD-INESC TEC, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Portugal
E-mail address: desmarque@gmail.com

LIAAD-INESC TEC, Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Portugal
E-mail address: aapinto@fc.up.pt