C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 1045–1050, 2000
Économie mathématique/*Mathematical Economics*
(Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*)

Les relations de Slutsky généralisées

Marwan AL OQEILI

Ceremade, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France
Courriel : aloqeili@pi.ceremade.dauphine.fr

(Reçu le 3 février 2000, accepté le 27 avril 2000)

Résumé. Les relations de Slutsky caractérisent les demandes individuelles en économie mathématique. Nous obtenons des relations qui les étendent à d'autres situations. Nous considérons un problème de maximisation sous m contraintes. Pour chaque contrainte, il existe une matrice symétrique et semi-définie négative du type de Slutsky. De plus, toutes ces matrices sont proportionnelles et les coefficients de proportionnalité dvoivent vérifier un système d'équations aux dérivées partielles. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The generalized Slutsky relations

Abstract. *The Slutsky relations characterize the individual demand in mathematical economics. We obtain a set of relations that extend the Slutsky relations to other situations. We consider a maximization problem with several constraints. For each constraint, there exists a symmetric negative semi-definite matrix. Moreover, these matrices are proportional. The proportionality coefficients must satisfy a system of first order partial differential equations.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In this Note, we discuss the problem of characterizing the solution of the following multiconstraint utility maximization problem:

$$\{\max U(x),\ Px = R\},$$

where U is an increasing smooth utility function which is supposed to be strongly quasiconcave, P is an $m \times n$ matrix of rank m with strictly positive coefficients and, $R \in \mathbb{R}^m_{++}$.

Let $V(P,R)$ be the value function of the previous optimization problem. If $x(P,R)$ is the solution of the above problem and $\lambda_1(P,R),\ldots,\lambda_m(P,R)$ are the corresponding Lagrange multipliers, which are supposed to be strictly positive, then we have the following relations

$$\frac{\partial V}{\partial p^i_j} = -\lambda_i x^j, \qquad \frac{\partial V}{\partial r^i} = \lambda_i. \tag{1}$$

Note présentée par Pierre-Louis LIONS.

S0764-4442(00)00310-4/FLA
© 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

The function V is quasiconvex with respect to each (p^i, r^i), $i \leqslant m$, separately, where p^i is the i-th line of the matrix P. We set $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. A first set of necessary conditions is given by the following theorem.

THEOREM 1. – *Let x be the solution of the above maximization problem and λ the associated vector of Lagrange multipliers, then the following necessary conditions are satisfied*

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p^k_\ell} + \frac{\partial x^j}{\partial r^k} x^\ell \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^\ell}{\partial p^i_j} + \frac{\partial x^\ell}{\partial r^i} x^j \right), \quad \forall 1 \leqslant i, k \leqslant m,\ 1 \leqslant j, \ell \leqslant n.$$

Rewrite the above conditions under the form $\lambda_i S^{j\ell}_k = \lambda_k S^{lj}_i$. These conditions imply that for each constraint there exists a symmetric matrix. Moreover, these matrices are proportional. They are also negative semidefinite.

Define a family of differential 1-forms $\Omega^{j\ell} = \sum_i S^{j\ell}_i \omega^i$, $j, \ell \leqslant n$, where $\omega^i = \sum_j x^j \mathrm{d}p^i_j - \mathrm{d}r^i$, $i \leqslant m$, and a family of vector fields $\xi^i = \sum_j p^i_j \frac{\partial}{\partial p^i_j}$, $i \leqslant m$. Relations (1) imply that $dV = -\sum_i \lambda_i \omega^i$. Let $\lambda_{ik} = \lambda_i / \lambda_k$.

The following theorem gives the necessary and sufficient conditions for mathematical and economic integration:

THEOREM 2. – *Let $\mathcal{U}$ be a neighbourhood of some point $(\overline{P}, \overline{R})$ and $x \in \mathbb{R}^n$ be a given smooth function. Define a family of differential 1-forms, $\omega^1, \ldots, \omega^m$, as above. Suppose that there exists $m+1$ functions V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ such that*

$$\mathrm{d}V = -\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega^i,$$

then $\sum_i \lambda_i \, \mathrm{d}\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m = 0$ and $\Omega^{j\ell} \wedge \mathrm{d}\Omega^{j\ell} = 0$, for all $j, \ell \leqslant n$.

Conversely, if $\Omega^{j\ell} \wedge \mathrm{d}\Omega^{j\ell} = 0$, $\langle \Omega^{j\ell}, \xi^i \rangle = r^i S^{j\ell}_i$, over $\mathcal{U}$, and $S_i = \lambda_{ik} S_k$, $\lambda_{ik} > 0$ are smooth functions defined over $\mathcal{U}$, then there exists $m+1$ functions V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ defined over some neighbourhood $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ such that $\mathrm{d}V = -\sum_i \lambda_i \omega^i$, $\lambda_i / \lambda_k = \lambda_{ik}$. Moreover, V is quasiconvex with respect to (p^i, r^i), for all $i \leqslant m$, if and only if the matrices $S_1, \ldots, S_m$ are negative semidefinite.

The above conditions can be explicited to get conditions over X and the proportionnality coefficients λ_{ik}. Let $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ be an observed demand function. If it satisfies the above necessary and sufficient conditions, then we get an indirect utility function. Define the function $x \mapsto U(x) = \min_{(P,R)} \{V(P,R) \mid Px \leqslant R\}$. This function is not necessarily quasiconcave. This problem will be studied later.

1. Introduction

Le modèle de demande classique en micro-économie représente les comportements d'un individu qui cherche à maximiser son utilité sous la contrainte budgétaire. En d'autres termes, l'individu résout le problème de maximisation suivant :

$$\big\{ \max U(x),\ p \cdot x = y \big\},$$

où $p \gg 0$ est le vecteur des prix et $y > 0$ est le revenu. La solution de ce problème, notée $x(p, y)$, est la fonction de demande individuelle. Cette fonction satisfait, bien entendu, la contrainte budgétaire. De plus, la matrice suivante, appelée la matrice de Slutsky, est symétrique et semi-définie négative :

$$S^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial p^j} + \frac{\partial x^i}{\partial y} x^j, \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Réciproquement, toute fonction de classe C^∞ satisfaisant ces conditions est une fonction de demande individuelle.

On se propose dans cette Note d'étendre la caractérisation des fonctions de demande individuelles au cas de plusieurs contraintes. Ce type de problème a été discuté par Hatta [6] dans le cas de contraintes non linéaires et par Epstein [5] dans le cas de deux contraintes linéaires découplées. Hatta obtient des conditions nécessaires et Epstein obtient des conditions nécessaires et suffisantes.

Dans cette Note nous généralisons les résultats d'Epstein au cas de problèmes couplés à m contraintes, avec $m \geqslant 2$. Ce type de problème intervient dans le cadre de la théorie de rationnement et en théorie de marchés incomplets. Diamond et Yaari, [2], ont démontré que le problème de rationnement que nous étudions et le problème de choix de consommations et de portefeuille optimal s'écrivent sous la même forme.

Nous utiliserons les méthodes du calcul différentiel extérieur qui ont été introduites dans le sujet par Ekeland et Chiappori, [3,4].

2. Exposé du problème

On cherche à trouver les conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire une fonction donnée $x(\cdot,\cdot)$ de classe C^∞ pour provenir de la résolution du problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \big\{\max U(x),\ Px = R\big\},$$

où $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞, croissante, $U'' < 0$ sur $\nabla U^\perp$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, P est une $m \times n$ matrice de rang maximal m, $m < n$, telle que $p^i_j > 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, et $R \in \mathbb{R}^m_{++}$.

En considérant $(\mathcal{P})$ comme un problème de rationnement, la matrice P représente des coupons de rationnement dont l'individu dispose. Ce type de rationnement peut être considéré comme le remplacement d'un système d'une seule monnaie par un système de plusieurs monnaies.

Pour certaines valeurs de $\lambda_i = \lambda_i(P,R) \geqslant 0$, la fonction valeur V de ce problème prend la forme :

$$V(P,R) := \max\left\{U(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i\left(r^i - \sum_{j=1}^n p^i_j x^j\right)\right\},$$

où $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1,\dots,m$, sont les multiplicateurs de Lagrange. Les fonctions $\lambda_i(P,R)$ sont supposées strictement positives. La fonction V est quasi convexe en (p^i, r^i) pour tout i (mais pas par rapport à l'ensemble des variables). Puisque la fonction U est strictement quasi concave, le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution $\bar{x} = (\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n)$, supposée strictement positive, de classe C^∞.

On considère la solution du problème d'optimisation $(\mathcal{P})$, ainsi que les multiplicateurs de Lagrange correspondants, comme fonctions de P et R. La fonction V est donc donnée par :

$$V(P,R) = U\big(x(P,R)\big) + \lambda(P,R)'\big(R - Px(P,R)\big),$$

où $\lambda'(P,R)$ désigne la transposée de $\lambda(P,R)$. Alors, en dérivant V par rapport à P et R, et en utilisant les conditions d'optimalité, on obtient pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, les relations suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial p^i_j} = -\lambda_i x^j, \qquad \frac{\partial V}{\partial r^i} = \lambda_i. \tag{2}$$

Pour $x = (x^1,\dots,x^n)$ donné, on définit les 1-formes différentielles $\omega^1,\dots,\omega^m$ par :

$$\omega^i := \sum_{j=1}^n x^j(P,R)\,\mathrm{d}p^i_j - \mathrm{d}r^i. \tag{3}$$

Soit $\xi^i = \sum_j p^i_j \frac{\partial}{\partial p^i_j}$ un champ de vecteurs, les contraintes $Px = R$ s'écrivent $\langle \omega^k, \xi^i \rangle = r^k \delta^i_k$, où δ^i_k est le symbole de Kronecker.

En utilisant les relations (2) et (3), la différentielle de V s'écrit comme suit :

$$\mathrm{d}V(P,R) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(P,R)\omega^i(P,R). \tag{4}$$

La résolution du problème d'intégrabilité revient à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction séparément quasi convexe V satisfaisant les relations (2). Pour simplifier les notations, on fixe les rangs des indices comme suit : $1 \leqslant i, k, k' \leqslant m$ et $1 \leqslant j, j', \ell \leqslant n$.

2.1. *Les relations de Slutsky généralisées* – Le théorème suivant nous donne des conditions nécessaires que doit satisfaire la solution x du problème $(\mathcal{P})$. Ce résultat est une généralisation des relations de Slutsky. Les multiplicateurs de Lagrange $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ associés à la solution x, apparaissent dans ces relations.

THÉORÈME 2.1. – *Soient $(x(P,R), \lambda(P,R))$ des fonctions de classe C^∞ où x est la solution du problème $(\mathcal{P})$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés. Alors, $(x(P,R), \lambda(P,R))$ satisfont les conditions nécessaires suivantes* :

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p^k_\ell} + \frac{\partial x^j}{\partial r^k} x^\ell \right) = \lambda_k \left(\frac{\partial x^\ell}{\partial p^i_j} + \frac{\partial x^\ell}{\partial r^i} x^j \right), \quad \forall\, 1 \leqslant i, k \leqslant m,\ 1 \leqslant j, \ell \leqslant n. \tag{5}$$

Démonstration. – Il suffit de prendre la dérivée extérieure de (4). □

Soit $S^{j\ell}_i := \dfrac{\partial x^j}{\partial p^i_\ell} + \dfrac{\partial x^j}{\partial r^i} x^\ell$.

On remarque que pour chaque contrainte, il existe une matrice symétrique du type de Slutsky. De plus, toutes ces matrices sont proportionnelles, $S_i = (\lambda_i/\lambda_k) S_k$. Dorénavant, on notera λ_{ik} le quotient λ_i/λ_k.

Les relations (5) signifient que si deux biens sont complémentaires ou substituables par rapport à une seule monnaie, alors ils le sont par rapport à toutes les autres monnaies. La fonction de demande x est observable, ce qui implique que λ_{ik}, $1 \leqslant i < k \leqslant m$, le sont aussi.

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour trouver une fonction V satisfaisant (2). Il faut rajouter des conditions de symétrie sur les fonctions λ_{ik}. Ces fonctions sont déterminées par les relations précédentes d'où l'intérêt d'avoir des conditions sur λ_{ik} et non sur λ_i.

Cela nous amène au problème d'intégration mathématique.

2.2. *L'intégration mathématique*. – L'intégration mathématique signifie que l'on cherche les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des fonctions V, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ satisfaisant la décomposition (4) sans que V soit nécessairement convexe.

La multiplication d'une (ou de plusieurs) contrainte par une constante (positive) ne change ni la solution du problème x ni sa valeur donnée par $V(P,R) = U(x(P,R))$. Cela implique que si x est la solution du problème $(\mathcal{P})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange alors ces fonctions satisfont les conditions d'homogénéité suivantes :

$$\sum_\ell \frac{\partial x^j}{\partial p^k_\ell} p^k_\ell + \frac{\partial x^j}{\partial r^k} r^k = 0, \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{6}$$

$$\sum_\ell \frac{\partial \lambda_i}{\partial p^k_\ell} p^k_\ell + \frac{\partial \lambda_i}{\partial r^k} r^k + \lambda_i \delta^i_k = 0, \quad \forall\, 1 \leqslant i, k \leqslant m, \tag{7}$$

où δ^i_k est le symbole de Kronecker. On démontre la réciproque du théorème 2.1.

LEMME 2.1. – *Soient $\omega^1, \ldots, \omega^m$ des 1-formes définies par* (3) *et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des fonctions données, de classe C^∞ et $x(P,R)$ est une fonction homogène de degré zéro en (p^i, r^i), pour tout i. Alors, les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\lambda_i \left(\dfrac{\partial x^j}{\partial p^k_\ell} + \dfrac{\partial x^j}{\partial r^k} x^\ell \right) = \lambda_k \left(\dfrac{\partial x^\ell}{\partial p^i_j} + \dfrac{\partial x^\ell}{\partial r^i} x^j \right), \quad \forall\, i, j, k, \ell,$

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^m \lambda_i \, \mathrm{d}\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m = 0.$

Les conditions précédentes s'écrivent sous la forme : $\lambda_i S^{j\ell}_k = \lambda_k S^{\ell j}_i$, où S_i est la matrice de Slutsky correspondant à la i^{me} contrainte. On définit les 1-formes $\Omega^{j\ell}$ par : $\Omega^{j\ell} = \sum_{i=1}^m S^{j\ell}_i \, \omega^i$, $j, \ell = 1, \ldots, n$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégration mathématique sont données par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. – *On se donne un voisinage $\mathcal{U}$ de $(\overline{P}, \overline{R})$, des formes différentielles $\omega^1, \ldots, \omega^m$ et des fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. S'il existe une fonction V définie sur $\mathcal{U}$ telle que*

$$\mathrm{d}V = -\sum_i \lambda_i \omega^i, \tag{8}$$

alors, $\sum_i \lambda_i \, \mathrm{d}\omega^i \wedge \omega^i \wedge \cdots \wedge \omega^m = 0$ et $\Omega^{j\ell} \wedge \mathrm{d}\Omega^{j\ell} = 0$, $\forall\, 1 \leqslant j, \ell \leqslant n$.

Réciproquement, si $\Omega^{j\ell} \wedge \mathrm{d}\Omega^{j\ell} = 0$, $\langle \Omega^{j\ell}, \xi^i \rangle = S^{j\ell}_i r^i$ dans $\mathcal{U}$, et $S_i = \lambda_{ik} S_k$, $\lambda_{ik} > 0$, définies et de classe C^∞ dans $\mathcal{U}$, alors il existe $m+1$ fonctions $V, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, définies sur un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, satisfaisant la décomposition (8)*, où $\lambda_i / \lambda_k = \lambda_{ik}$.*

Démonstration. – Supposons que $S^{j\ell}_1 \neq 0$ pour certains j et ℓ. Alors, les relations $\lambda_i S^{j\ell}_1 = \lambda_1 S^{j\ell}_i$ impliquent que $\lambda_i = (S^{j\ell}_i / S^{j\ell}_1)\, \lambda_1$. Il suffit de substituer pour λ_i dans (8) pour en déduire les conditions nécessaires. Le théorème de Frobenius implique que ces conditions sont suffisantes. □

Ces conditions sont explicitées par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3. – *Soient x une fonction donnée de classe C^∞ satisfaisant les contraintes $Px = R$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des fonctions données, strictement positives, de classe C^∞. Alors* :

$$\Omega^{j\ell} \wedge \mathrm{d}\Omega^{j\ell} = 0, \quad \forall\, j, \ell, \quad \textit{et} \quad S_i = \lambda_{ik'} S_{k'}, \quad \forall\, i, k',$$

si et seulement si, pour un certain $k \in \{1, \ldots, m\}$, $\forall\, 1 \leqslant i, k' \leqslant m$, $\forall\, 1 \leqslant j, \ell \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
&\lambda_{ki}\lambda_{kk'} \left(\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial p^{k'}_\ell} x^j - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} x^\ell \right) + \lambda_{kk'} \frac{\partial x^j}{\partial p^{k'}_\ell} - \lambda_{ki} \frac{\partial x^\ell}{\partial p^i_j} + \frac{1}{r^k} \big(\delta^k_{k'} - \delta^k_i \big) x^j x^\ell \\
&\quad + \frac{1}{r^k} \left(\sum_{j'} \frac{\partial x^\ell}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^j - \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^\ell \right) + \frac{1}{r^k} \lambda_{ik'} \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{k'i}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^j x^\ell = 0, \\
&\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial r^{k'}} x^j + \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial p^i_j} + \lambda_{ik} \frac{\partial x^j}{\partial r^{k'}} + \frac{1}{r^k} \lambda^2_{k'k} \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} x^j + \frac{1}{r^k} \big(\lambda_{k'k} \delta^i_k - \lambda_{ik} \delta^{k'}_k \big) x^j \\
&\quad + \frac{1}{r^k} \lambda_{ik} \lambda_{k'k} \sum_{j'} \frac{\partial x^j}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} = 0, \\
&\frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial r^{k'}} - \frac{\partial \lambda_{k'k}}{\partial r^i} + \frac{1}{r^k} \lambda^2_{k'k} \sum_{j'} \frac{\partial \lambda_{ik'}}{\partial p^k_{j'}} p^k_{j'} + \frac{1}{r^k} \big(\lambda_{k'k} \delta^i_k - \lambda_{ik} \delta^{k'}_k \big) = 0 \quad \textit{et} \quad \lambda_{ik'} = \frac{\lambda_{kk'}}{\lambda_{ki}}.
\end{aligned}$$

Ce sont donc les conditions nécessaires et suffisantes de l'intégration mathématique.

3. L'intégration économique

Dans le cas d'une seule contrainte, la matrice de Slutsky est semi-définie négative. Pour le problème de maximisation sous m contraintes, nous démontrons une généralisation de cette condition. On a :

LEMME 3.1. – *Soient V la fonction valeur du problème $(\mathcal{P})$, x la solution de ce problème et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les multiplicateurs de Lagrange associés. Alors, pour tout $1 \leqslant i, k \leqslant m$, $1 \leqslant j, \ell \leqslant n$,*

$$\lambda_i \left(\frac{\partial x^j}{\partial p_\ell^k} + \frac{\partial x^j}{\partial r^k} x^\ell \right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial p_\ell^k \partial p_j^i} + \frac{1}{r^i} \sum_{j'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_\ell^k \partial p_{j'}^i} p_{j'}^i x^j$$
$$+ \frac{1}{r^k} \sum_{\ell'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_j^i \partial p_{\ell'}^k} p_{\ell'}^k x^\ell - \frac{1}{r^i} \frac{1}{r^k} \sum_{j',\ell'} \frac{\partial^2 V}{\partial p_{j'}^i p_{\ell'}^k} p_{j'}^i p_{\ell'}^k x^j x^\ell.$$

Il est clair que la quasi-convexité de V en (p^i, y^i), pour tout i, implique que les $S_1, \ldots, S_m$ sont semi-définies négatives. De plus, en utilisant le fait que le tenseur $\lambda_i S_k^{j\ell}$ se met sous la forme suivante : pour tout $1 \leqslant k_0 \leqslant m$, $\lambda_i S_k^{j\ell} = (\lambda_{k_0})^{-1} \lambda_i \lambda_k S_{k_0}^{j\ell}$, $1 \leqslant i, k \leqslant m$, $1 \leqslant j, \ell \leqslant n$.
Il est facile de démontrer le théorème qui suit :

THÉORÈME 3.1. – *Pour tout vecteur $\xi \in \mathbb{R}^{mn}$, on a* $\sum_{i,j,k,\ell} \lambda_i S_k^{j\ell} \xi_j^i \xi_\ell^k \leqslant 0$.

Le théorème suivant donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégration économique.

THÉORÈME 3.2. – *Soit x une fonction donnée de classe C^∞ satisfaisant les conditions du théorème* 2.3 *et $Px = R$ dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point donné $(\overline{P}, \overline{R}) \in \mathbb{R}_{++}^{mn+m}$. Supposons que pour tout i, la matrice S_i est symétrique et semi-définie négative, on suppose de plus que pour certains i_0, j_0, $S_{i_0}^{j_0 j_0} \neq 0$. Alors, il existe une fonction V quasi convexe en (p^i, r^i) pour tout i et il existe m fonctions positives $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ définies avec V sur un voisinage $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ telles que* $\mathrm{d}V(P,R) = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(P,R)\, \omega^i(P,R)$, $\forall (P,R) \in \mathcal{V}$, *et* $\lambda_{ik} = \lambda_i / \lambda_k$.

La fonction $x \mapsto U(x) = \min_{(P,R)}\{V(P,R) \mid Px \leqslant R\}$ est continue, croissante. Le problème de la quasi-concavité de U reste ouvert, il fera l'objet d'une recherche ultérieure.

Références bibliographiques

[1] Bryant R.L., Chern S.S., Gardner R.B., Goldschmidt H.L., Griffiths P.A., Exterior Differential Systems, Springer-Verlag, New York, 1991.
[2] Diamond P., Yaari M., Implications of the theory of rationing for consumer under uncertainty, Amer. Econ. Rev. 62 (1972) 333–343.
[3] Chiappori P.A., Ekeland I., Aggregation and market demand: an exterior differential calculus viewpoint, Econometrica 67 (1999) 1435–1457.
[4] Ekeland I., Exterior differential calculus and applications to economy theory, Preprint, Institut de Finance Dauphine, 1999, 34 p.
[5] Epstein L., Generalized duality and integrability, Econometrica 49 (1981) 655–678.
[6] Hatta T., Structure of the correspondence principle at an extremum point, Rev. Econ. Studies 47 (1980) 987–997.